Estadística Matemática: Inferencia

Final Junio 2.002, Tipo: $\boxed{\text{A}}$

Apellidos y Nombre: ______________________

DNI: ______________________

Grupo: ______________________

Profesor : ______________________

Sección 1. CUESTIONES

1. Considera el problema de estimar la media de una distribución que sabes es $N(\mu, \sigma_0^2)$ (la varianza es conocida). Sobre la media, dispones de la distribución *a priori* $N(0, \delta^2)$. Obtén la distribución *a posteriori* y dí cual sería el estimador de Bayes para el parámetro μ.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad de probabilidad $f_X(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}$, en que $\theta > 0$ es un parámetro desconocido.

   a) Encuéntrese un estadístico suficiente para θ.

   b) Compruébese que $-\log X_1$ es un estimador insesgado para θ^{-1}.

   c) Haciendo uso del resultado anterior, encuéntrese otro estimador insesgado de θ^{-1} con varianza menor.

3. *(sencillo, pero largo; pretende ilustrar lo idiota que resulta contrastar hipótesis "à la Neyman-Pearson" con niveles de significación convencionales, sin reflexionar sobre el problema de fondo.)* Te enfrentas al problema de controlar la calidad de remesas de fruta. Recibes naranjas, en envases cerrados. Las especificaciones técnicas y contractuales son las siguientes.

   - Cada partida es de diez mil cajas. Los envíos se hacen por mar y, sea por mala estiba, sea por problemas sobrevenidos en la navegación, en el pasado se han presentado "malas" remesas en algunas ocasiones. Por "malas" se entiende que un 40 % de las cajas llegaban con su contenido mohoso e invendible.
   - Cuando las remesas no son "malas", son "buenas": ello no quiere decir que todas las cajas sean perfectas. Se considera buena una remesa con el 5 % de cajas en malas condiciones. No hay remesas "regulares": o son "malas" o son "buenas".
   - La experiencia precedente muestra que en aproximadamente un 10 % de los casos las remesas son malas, y en el 90 % de las ocasiones buenas.
   - No sabes cómo ni porqué, pero la empresa para la que trabajas pactó con el proveedor de la fruta y el consignatario del buque que las remesas se aceptarían o rechazarían en el acto, sobre el muelle; y que el comprador (o sea, tu empresa) estaría facultado para abrir diez cajas antes de decidir aceptar o rechazar la remesa.
   - El coste de aceptar una remesa "mala" asciende a 15 millones de pesetas, entre fruta que hay que tirar, fletes, abonos a nuestros clientes, etc.
   - El coste de rechazar una remesa "buena" es de 20 millones: tanto proveedor como consignatario no tienen a quien venderla, y ante la alternativa de tirarla al mar, tenemos la certeza de que abriran todas las cajas de una remesa rechazada. Si contando una por una hay 500 ó menos cajas defectuosas (el 5 % tolerado), habremos de indemnizarles con la citada cantidad.

   Con la anterior especificación del problema, *a*) Diseña un contraste para la hipótesis nula H_0 : "Remesa buena" frente a la alternativa H_a : "Remesa mala" que sea el más potente de tamaño $\alpha \leq 0{,}05$.

b) Calcula el riesgo de Bayes derivado de emplear dicho contraste como procedimiento de decisión.

c) ¿Cual sería el procedimiento de Bayes?

> **Ayuda:** Hay once posibles resultados de abrir las diez cajas: de cero a diez defectuosas. Parece sensato considerar once únicos procedimientos (¿cuáles?).

d) Compara el procedimiento de Bayes con el que se obtendría de la aplicación rutinaria de un contraste con $\alpha = 0{,}05$ y escribe el comentario que tu profesor quiere leer.

e) *(mucho más arduo; no es preciso que lo hagas —requerirías un ordenador—, pero sí que lo pienses, y bosquejes el proceso que seguirías.)* Supón que el abrir las cajas e inspeccionar su contenido es un procedimiento destructivo: ya no se puede vender la caja, y se pierde su valor de 3000 ptas. Este coste es a cuenta del comprador. Si no estuvieras constreñido a muestrear precisamente diez cajas, sino las que desearas ¿que harías?